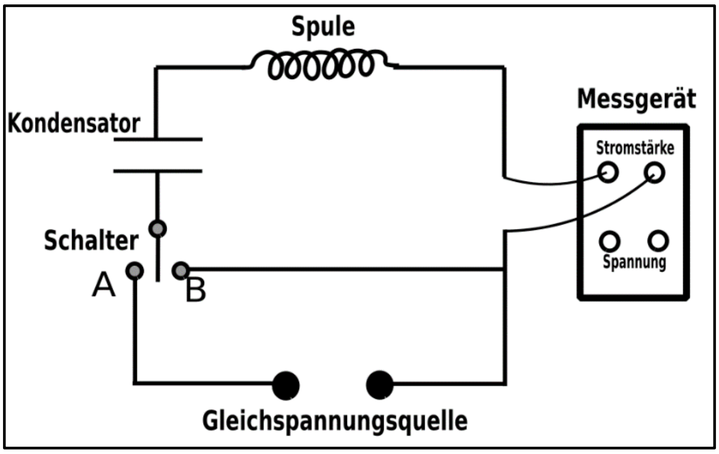
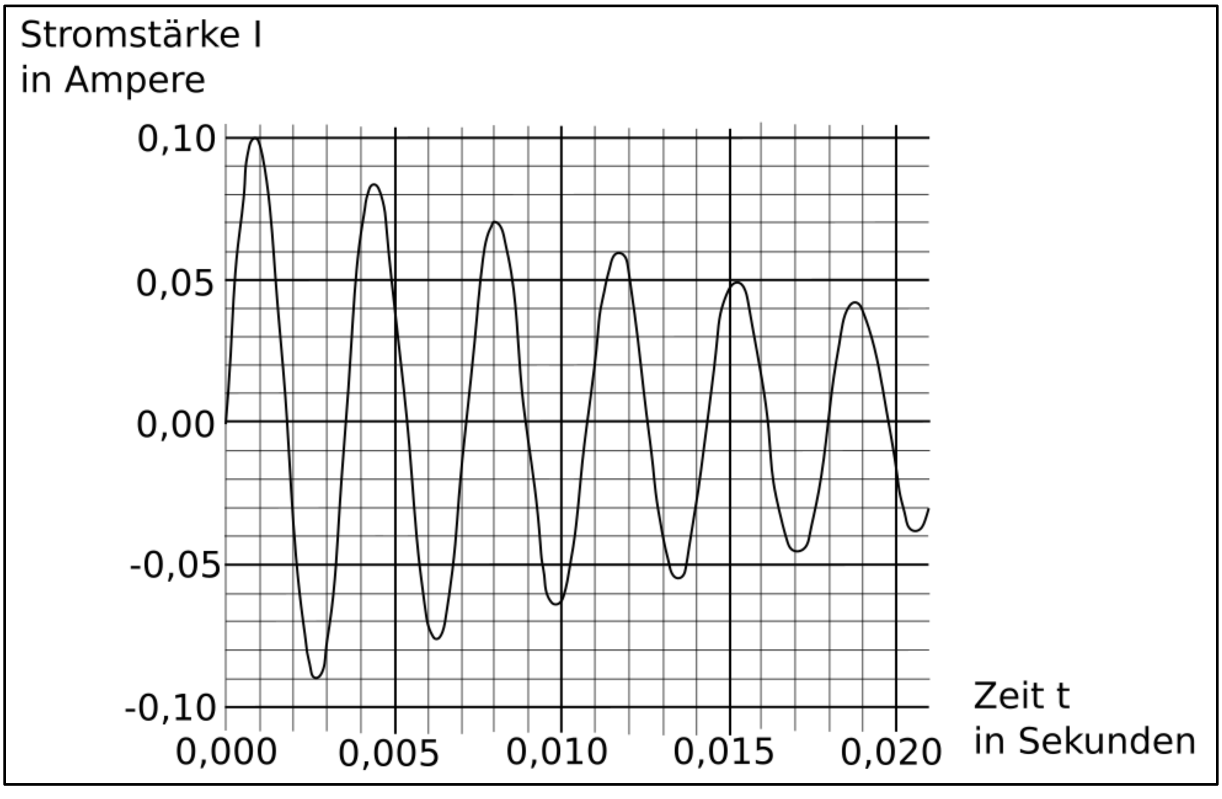
Aufgabenzettel – Elektromagnetischer Schwingkreis

Die Abbildung zeigt eine Schaltplanzeichnung für ein Experiment, das darauf abzielt, eine gedämpfte elektromagnetische Schwingung zu generieren und aufzuzeichnen. Bevor der Versuch startet, wird der Kondensator aufgeladen, indem der Schalter S auf Position A gesetzt wird. Im Moment t = 0 wird der Schalter S nach Position B umgelegt. Die Intensität des Stroms, der durch den Schwingkreis fließt, wird mittels eines Datenerfassungssystems gemessen und die entsprechenden Ergebnisse sind im folgenden Diagramm dargestellt. Die Messapparatur beginnt automatisch mit der Aufzeichnung der Kurve, sobald der Schalter S in die gezeigte Position B umgeschaltet wird.





Nehmen Sie an, dass die Funktion der Stromstärke über die Zeit I(t) für diese gedämpfte elektromagnetische Schwingung mit guter Annäherung beschrieben werden kann durch:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-kt} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

a) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T der gedämpften elektromagnetischen Schwingung mithilfe des Diagramms.

$T \approx 0{,}0036$

b) Ermitteln Sie den Dämpfungsfaktor k mithilfe des Diagramms und erläutern Sie, warum das von Ihnen angewandte Verfahren korrekt ist.

[Kontrollergebnis: $k = 1{,}48\ s^{-1}$]

Anmerkung: Der Vorfaktor I_0 ist unbekannt und I_0 stellt zudem nicht die erste Amplitudenhöhe dar.

Quotientenbildung: $\frac{\text{Erste Amplitude}}{\text{Zweite Amplitude}} = \frac{I\left(\frac{T}{4}\right)}{I\left(\frac{T}{4}+T\right)}$

$$\frac{I\left(\frac{T}{4}\right)}{I\left(\frac{T}{4}+T\right)} = \frac{I_0 \cdot e^{-k\cdot\frac{T}{4}} \cdot \sin\left(\omega\cdot\frac{T}{4}\right)}{I_0 \cdot e^{-k\cdot\left(\frac{T}{4}+T\right)} \cdot \sin\left(\omega\cdot\left(\frac{T}{4}+T\right)\right)} = \frac{I_0\cdot e^{-k\cdot\frac{T}{4}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I_0\cdot e^{-k\cdot\frac{5}{4}\cdot T}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)}$$

$$\frac{I\left(\frac{T}{4}\right)}{I\left(\frac{T}{4}+T\right)} = \frac{e^{-k\cdot\frac{T}{4}}\cdot 1}{e^{-k\cdot\frac{5}{4}\cdot T}\cdot 1} = e^{-k\cdot\frac{T}{4}-\left(-k\cdot\frac{5}{4}\cdot T\right)} = e^{k\cdot T}$$

$$\ln\left(\frac{I\left(\frac{T}{4}\right)}{I\left(\frac{T}{4}+T\right)}\right) = k\cdot T \Rightarrow k = \frac{1}{T}\cdot\ln\left(\frac{I\left(\frac{T}{4}\right)}{I\left(\frac{T}{4}+T\right)}\right)$$

Ablesen aus Diagramm: $I\left(\frac{T}{4}\right) = 0{,}1\ A$ und $I\left(\frac{T}{4}+T\right) = 0{,}084 A$

$T = 0{,}0036$

$$k = \frac{1}{0{,}0036\ s}\cdot\ln\left(\frac{0{,}1}{0{,}084}\right) \approx 48{,}4\ s^{-1}$$

Für die Kreisfrequenz ω einer **gedämpften** elektromagnetischen Schwingung gilt der Zusammenhang

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - k^2}$$

Für die Kreisfrequenz ω_0 einer **nicht gedämpften** elektromagnetischen Schwingung gilt hingegen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

c) Bestimmen Sie auf Basis der bisher gesammelten Messdaten und Ergebnisse den Unterschied zwischen ω und ω_0 und beurteilen Sie das erhaltene Ergebnis.

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ einsetzen ergibt $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}0036\,s} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}\,s^{-1}$

Setzt man $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ in $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - k^2}$ ein

erhält man $\omega^2 = \omega_0^2 - k^2$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega^2 + k^2}$

Einsetzen der ermittelten Werte

$\omega_0 = \sqrt{(1{,}7 \cdot 10^3\,s^{-1})^2 + (48{,}4\,s^{-1})} = \sqrt{2892342{,}56\,s^{-2}} \approx 1{,}7 \cdot 10^3\,s^{-1}$

Eine Abweichung ist trotz Dämpfung kaum nachweisbar. Auch bei gedämpften Schwingungen kann in guter Näherung mit $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ gerechnet werden.

d) Bestimmen Sie die Induktivität L der Spule unter Verwendung der bislang erfassten Messwerte und Ergebnisse. [Kontrollergebnis: L ≈ (56 ± 2) mH]

Anmerkung: Die Kapazität des Kondensators beträgt C = 6 µF.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - k^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - k^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 + k^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{(\omega^2 + k^2) \cdot C}$$

Werte einsetzen

$$L = \frac{1}{\left((1{,}7 \cdot 10^3 s^{-1})^2 + (48{,}4 s^{-1})^2\right) \cdot 6 \cdot 10^{-6} F} = 0{,}0576 \frac{V \cdot s}{A} \approx 58 mH$$

Die Beziehungen für ω und ω_0 lassen sich durch theoretische Überlegungen ableiten. Die Differentialgleichung, die zu jedem Zeitpunkt $I(t)$ die Funktion der Stromstärke für die gedämpfte elektromagnetische Schwingung beschreibt, lautet:

$$\ddot{I}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) - \frac{R}{L} \cdot \dot{I}(t)$$

Eine mögliche Lösung dieser DGL ist folgende Stromstärke-Zeit-Funktion

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

e) Leiten Sie die zuvor genannte Differentialgleichung her, indem Sie die an den Komponenten des Schwingkreises entstehenden Spannungen sowie deren Gesamtsumme betrachten.

2. Kirchhoff'sches Gesetz: $U_R + U_L + U_C = U_{ges} = 0$

$U_R = R \cdot I$, $U_L = L \cdot \dot{I}$, $U_C = \frac{1}{C} \cdot Q$

$\Rightarrow R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0$

Ableiten: $R \cdot \dot{I}(t) + L \cdot \ddot{I}(t) + \frac{1}{C} \cdot \dot{Q}(t) = 0$

$\dot{Q}(t) = I(t)$

$\ddot{I}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) - \frac{R}{L} \cdot \dot{I}(t)$

f) Für den Fall einer ungedämpften Schwingung (R = 0 und k = 0 s^{-1}), leiten Sie die Beziehung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

her, indem Sie die Differentialgleichung nutzen und den vorgeschlagenen Lösungsansatz für die Strom-Zeit-Funktion anwenden.

Für $R = 0\,\Omega$ und $k = 0\,s^{-1}$ ergibt sich

$\ddot{I}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) - 0$ und der Ansatz zu

$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, wobei ω zu ω_0 wird

Der Lösungsansatz: $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ und

die 2. Ableitung: $\ddot{I}(t) = -I_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$

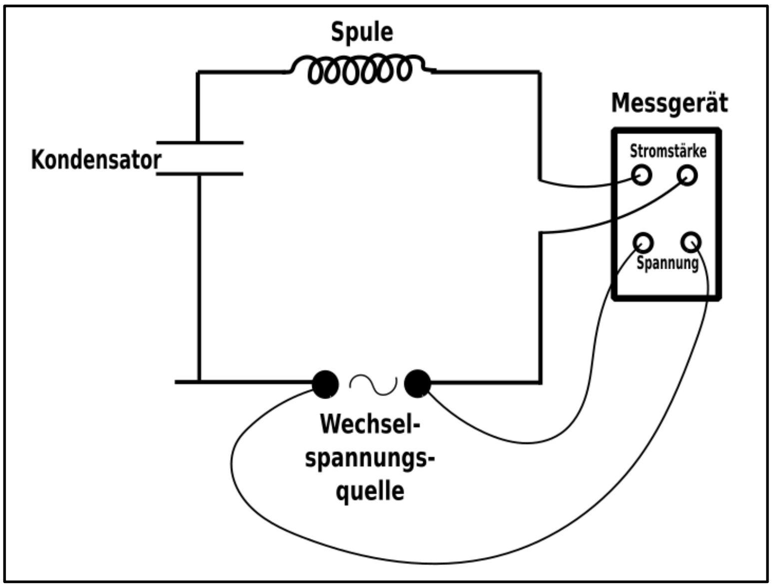
einsetzen in DGL:

$$-I_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot I_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

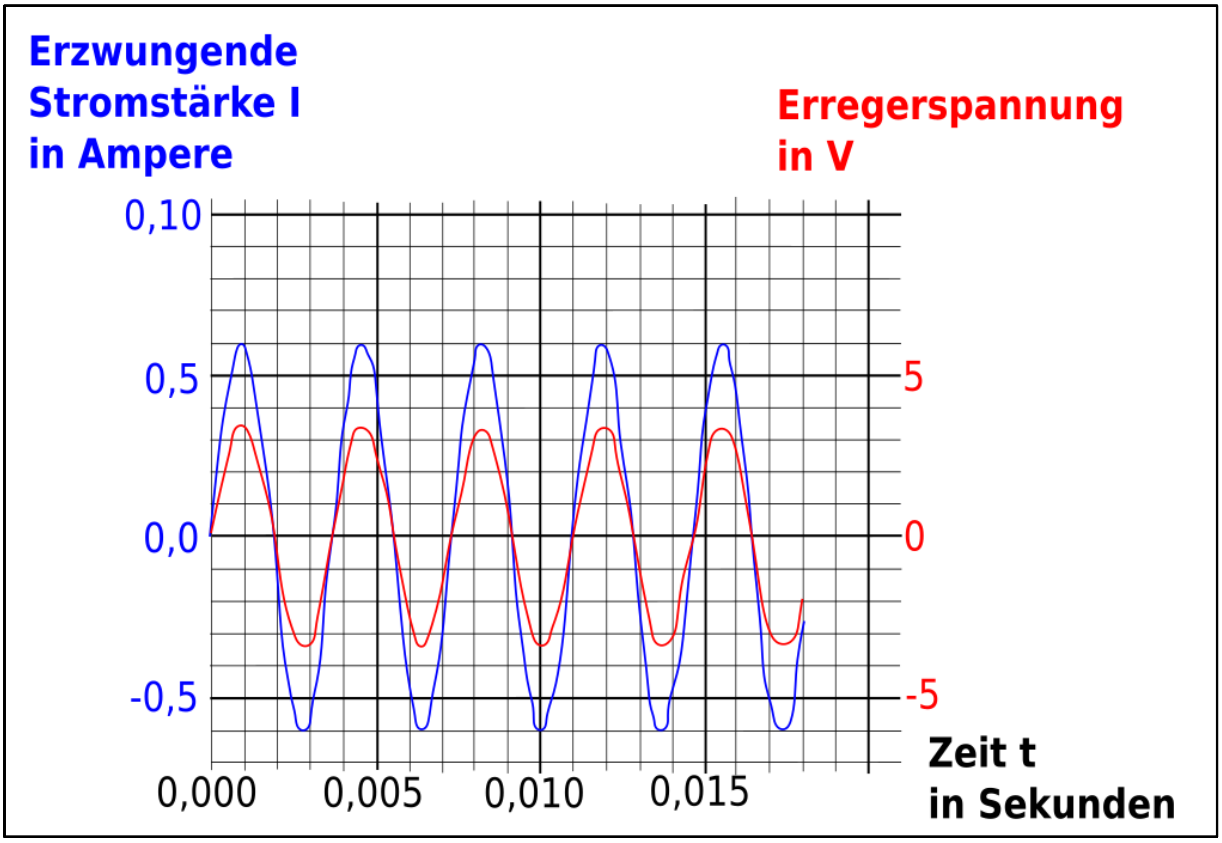
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Um eine elektromagnetische Schwingung mit gleichbleibender Amplitude zu erzielen, ersetzt man die Gleichspannungsquelle durch eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz *f*. Die folgenden zwei Diagramme veranschaulichen die zeitlichen Verläufe der Erregerspannung $U_{Erreger}$ und der durch die Erregerfrequenz f_{res} induzierten Stromstärke-Zeit-Funktion



$I_{erzwungen}$ beides abgebildet in einer phasengerechten Anordnung. Hierbei steht $U_{Erreger}$ für die Spannung an der Wechselspannungsquelle und $I_{erzwungen}$ für die Stromstärke im Schwingkreis.



g) Definieren Sie die Konzepte „erzwungene Schwingung“ und „Resonanz“.

Wenn ein System, das schwingen kann (in diesem Fall ein R-L-C-Serienkreis), von einer externen Quelle (hier eine Wechselspannungsquelle) periodisch angeregt wird, beginnt es, mit der gleichen Frequenz wie die Anregung zu schwingen, nachdem es eine kurze Zeit eingeschwungen ist. Im gegebenen Beispiel schwingt die Stromstärke als Funktion der Zeit, $I(t)$, immer mit derselben Frequenz f wie die erregende Spannung $U(t)$. Die Amplitude dieser erzwungenen Schwingung, also die Amplitude von $I(t)$, erreicht ein Maximum, wenn die Frequenz der erregenden Spannung $U(t)$ mit der Eigenfrequenz der freien Schwingung übereinstimmt. Diesen Zustand bezeichnet man als Resonanz.

h) Nennen Sie mindestens ein Merkmal, das darauf hindeutet, dass das vorherige Diagramm unter Resonanzbedingungen aufgenommen wurde. Beachten Sie: Die Spule und der Kondensator sind in den Experimentieranordnungen von Aufgabe a) und g) gleich.

Bei Resonanz entsprechen sich die Frequenz f und die Schwingdauer T der erzwungenen Schwingung exakt jenen der freien Schwingung. Diese Gleichheit der Werte lässt sich direkt aus den Diagrammen in den Abbildungen a) und g) ablesen, wo für die Schwingdauer jeweils ein Wert von T =0,0036 Sekunden festgestellt wird.

i) Erklären Sie, wie sich die Stromstärke I im vorherigen Diagramm verändert, wenn die Erregerfrequenz f verringert oder erhöht wird, während die Amplitude der anregenden Wechselspannung gleichbleibt.

Wenn man die Frequenz f der anregenden Wechselspannung stetig verringert oder erhöht, nimmt die Amplitude der erzwungenen Schwingung $I(t)$ in beiden Situationen kontinuierlich ab. Die Amplitude erreicht ihren maximalen Wert ausschließlich im Zustand der Resonanz.

Die Funktion der Stromstärke I über die Zeit t für diese erzwungene Schwingung lässt sich mit

$$I_{erzwungen}(t) = \hat{I} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

darstellen (vorherige Abbildung). Der durch die Induktivität *L* der Spule verursachte Spannungsabfall folgt der Zeitabhängigkeit

$$U_L(t) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

. Der Spannungsabfall am Kondensator, der eine Kapazität *C* besitzt, wird zeitabhängig als

$$U_C(t) = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

beschrieben.

j) Leiten Sie die beiden vorgegebenen Beziehungen

$$U_L(t) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

her.

Für die in einer Spule auftretende Selbstinduktions-spannung gilt: $U_{Ind,selbst}(t) = -L \cdot \dot{I}(t)$

$I(t)$ ist die Stromstärke durch die Spule

Für den aufgrund der Induktivität L der Spule auftretenden Spannungsabfall gilt somit

$U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t)$

In diesem Fall ist $I(t) = I_{erzwungen}(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Somit gilt: $\dot{I}(t) = \dot{I}_{erzwungen}(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \omega$

Für $U_L(t)$ folgt $U_L(t) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

k) Berechnungen zeigen, dass <u>im betrachteten Resonanzfall</u> die Amplituden von $U_L(t)$ und $U_C(t)$ identisch sind. Ermitteln Sie die Amplitude der aufgrund der Induktivität *L* der Spule hervorgerufenen Spannung $U_L(t)$ oder die Amplitude der am Kondensator auftretenden Spannung $U_C(t)$.

Die Amplitude $\hat{U}_L$ des aufgrund der Induktivität L der Spule auftretenden Spannungsabfalls ist gemäß der Beziehung für $U_L(t)$:

$\hat{U}_L = \omega \cdot L \cdot \hat{I} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot L \cdot \hat{I}$

Ablesen aus Diagramm $\hat{I} = 0{,}6\,A$

Mit $T = 0{,}0036\,s$ und $L = 55\,mH$

$\hat{U}_L = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}0036\,s} \cdot 55 \cdot 10^{-3}\,H \cdot 0{,}6\,A = 57{,}6\,V$

l) Deuten Sie das Ergebnis für

$$\hat{U}_L (= \hat{U}_C)$$

im Kontext des spezifischen Resonanzfalles.

Die Spannungsamplituden U_L und U_C liegen beide bei nahezu 60 Volt und übertreffen somit die Amplitude der Gesamtspannung (Erregerspannung), die laut Messdiagramm nur etwa 3,5 Volt beträgt, erheblich. Dies erscheint auf den ersten Blick überraschend, da in einem geschlossenen Stromkreis normalerweise die Gesamtheit der Einzelspannungen der an der Spannungsquelle anliegenden Gesamtspannung entspricht. Der Schlüssel zum Verständnis liegt jedoch darin, dass die Spannungen an $U_L(t)$ und $U_C(t)$ ihre Höchstwerte zu verschiedenen Zeitpunkten erreichen. Die Phasenverschiebung zwischen beträgt genau 180° bzw. eine halbe Periodendauer (T/2), was zur Folge hat, dass die Summe ihrer Spannungen zu jedem Zeitpunkt Null ergibt, da ihre Amplituden gleich groß sind. Dieses Phänomen, das im Resonanzfall auftritt, wird auch als Resonanzüberhöhung bezeichnet.