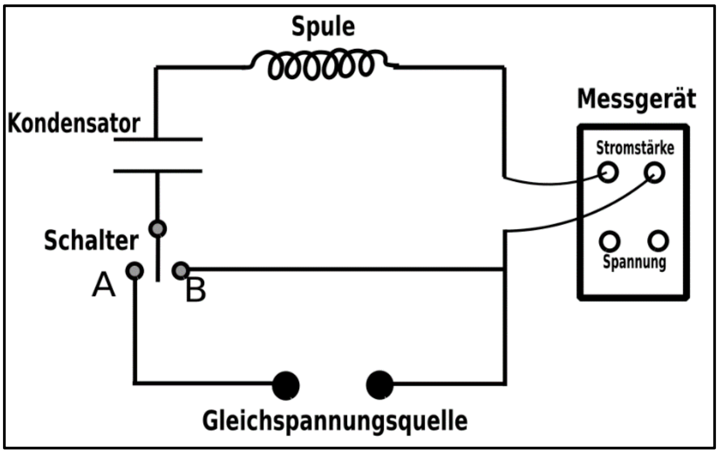
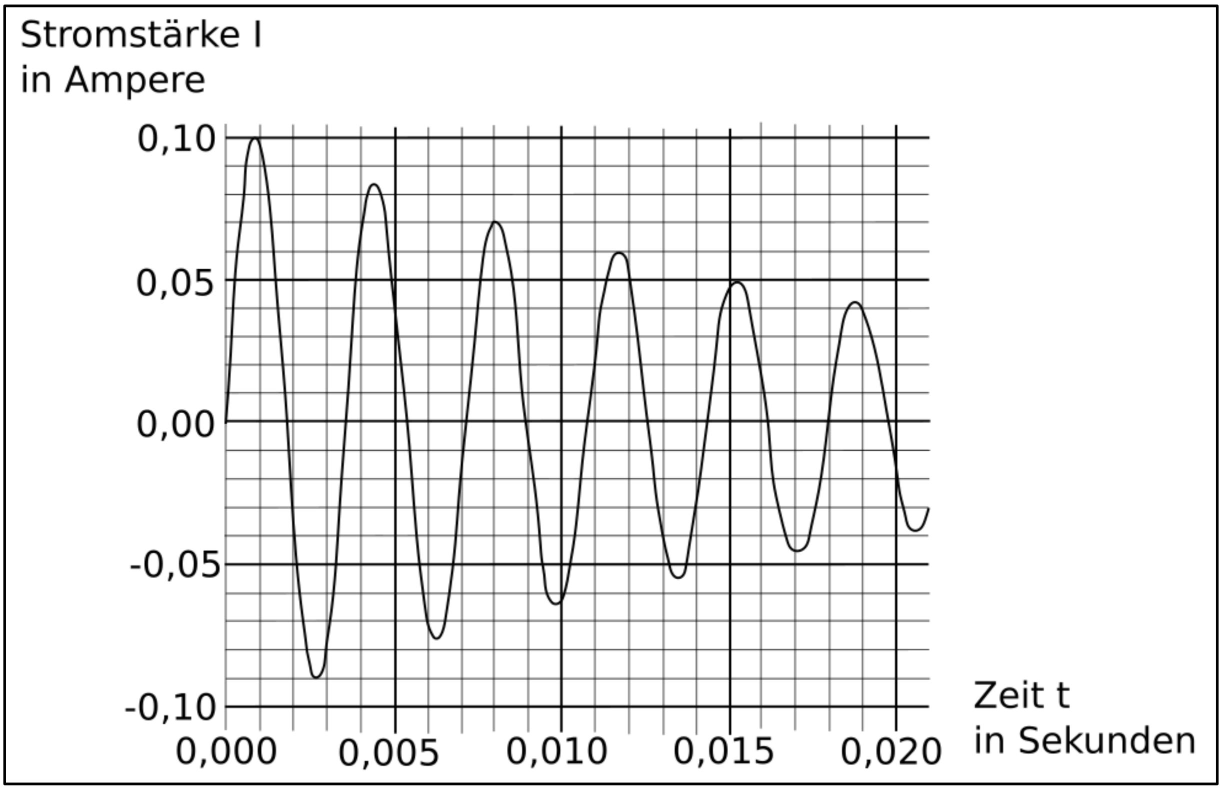
Aufgabenzettel – Elektromagnetischer Schwingkreis

Die Abbildung zeigt eine Schaltplanzeichnung für ein Experiment, das darauf abzielt, eine gedämpfte elektromagnetische Schwingung zu generieren und aufzuzeichnen. Bevor der Versuch startet, wird der Kondensator aufgeladen, indem der Schalter S auf Position A gesetzt wird. Im Moment t = 0 wird der Schalter S nach Position B umgelegt. Die Intensität des Stroms, der durch den Schwingkreis fließt, wird mittels eines Datenerfassungssystems gemessen und die entsprechenden Ergebnisse sind im folgenden Diagramm dargestellt. Die Messapparatur beginnt automatisch mit der Aufzeichnung der Kurve, sobald der Schalter S in die gezeigte Position B umgeschaltet wird.





Nehmen Sie an, dass die Funktion der Stromstärke über die Zeit I(t) für diese gedämpfte elektromagnetische Schwingung mit guter Annäherung beschrieben werden kann durch:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-kt} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

a) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T der gedämpften elektromagnetischen Schwingung mithilfe des Diagramms.

b) Ermitteln Sie den Dämpfungsfaktor k mithilfe des Diagramms und erläutern Sie, warum das von Ihnen angewandte Verfahren korrekt ist.

[Kontrollergebnis: $k = 1{,}48\ s^{-1}$]

Anmerkung: Der Vorfaktor I_0 ist unbekannt und I_0 stellt zudem nicht die erste Amplitudenhöhe dar.

Für die Kreisfrequenz ω einer **gedämpften** elektromagnetischen Schwingung gilt der Zusammenhang

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - k^2}$$

Für die Kreisfrequenz ω_0 einer **nicht gedämpften** elektromagnetischen Schwingung gilt hingegen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

c) Bestimmen Sie auf Basis der bisher gesammelten Messdaten und Ergebnisse den Unterschied zwischen ω und ω_0 und beurteilen Sie das erhaltene Ergebnis.

d) Bestimmen Sie die Induktivität L der Spule unter Verwendung der bislang erfassten Messwerte und Ergebnisse. [Kontrollergebnis: $L \approx (56 \pm 2)$ mH]

Anmerkung: Die Kapazität des Kondensators beträgt $C = 6$ µF.

Die Beziehungen für ω und ω_0 lassen sich durch theoretische Überlegungen ableiten. Die Differentialgleichung, die zu jedem Zeitpunkt $I(t)$ die Funktion der Stromstärke für die gedämpfte elektromagnetische Schwingung beschreibt, lautet:

$$\ddot{I}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) - \frac{R}{L} \cdot \dot{I}(t)$$

Eine mögliche Lösung dieser DGL ist folgende Stromstärke-Zeit-Funktion

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

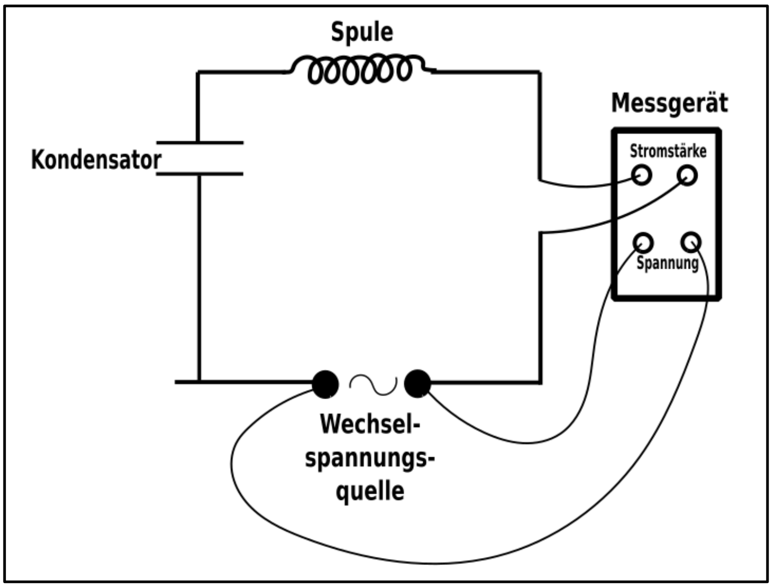
e) Leiten Sie die zuvor genannte Differentialgleichung her, indem Sie die an den Komponenten des Schwingkreises entstehenden Spannungen sowie deren Gesamtsumme betrachten.

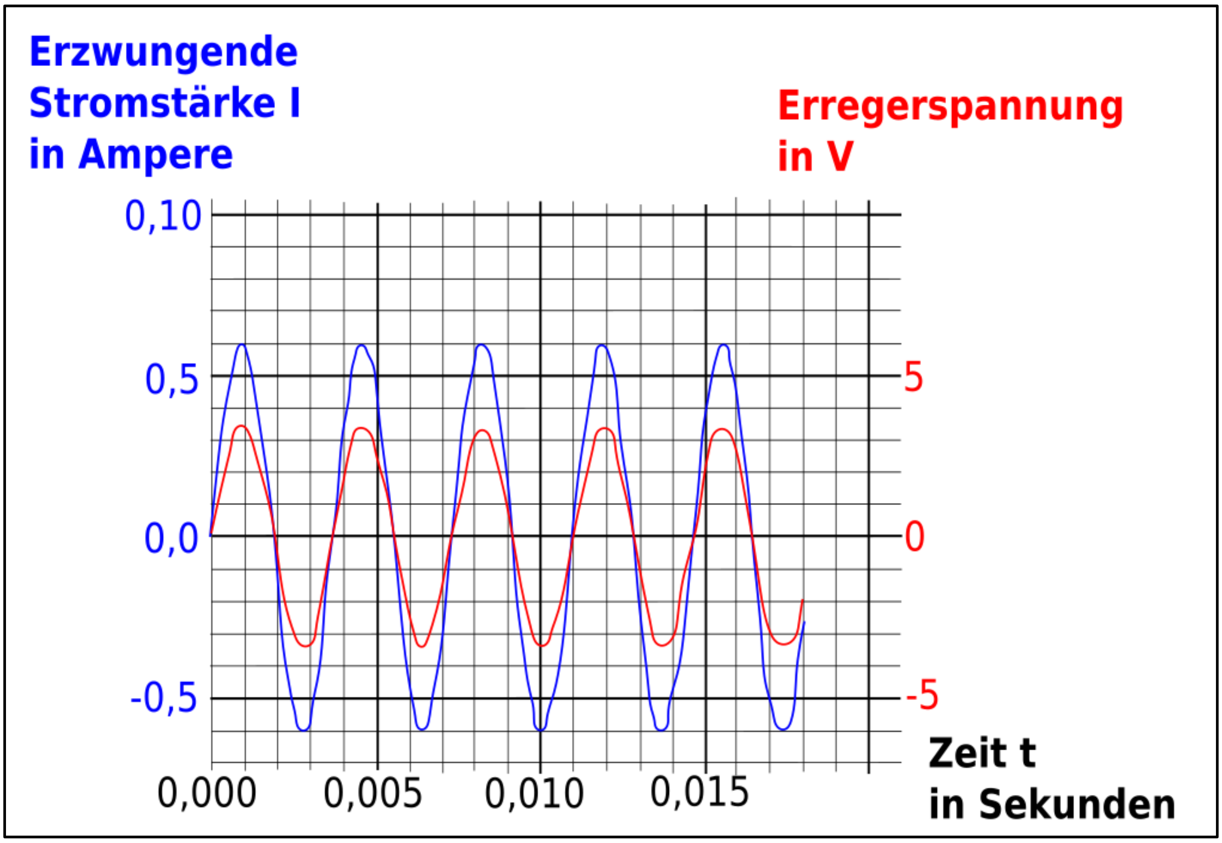
f) Für den Fall einer ungedämpften Schwingung (R = 0 und k = 0 s^{-1}), leiten Sie die Beziehung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

her, indem Sie die Differentialgleichung nutzen und den vorgeschlagenen Lösungsansatz für die Strom-Zeit-Funktion anwenden.

Um eine elektromagnetische Schwingung mit gleichbleibender Amplitude zu erzielen, ersetzt man die Gleichspannungsquelle durch eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz *f*. Die folgenden zwei Diagramme veranschaulichen die zeitlichen Verläufe der Erregerspannung $U_{Erreger}$ und der durch die Erregerfrequenz f_{res} induzierten Stromstärke-Zeit-Funktion $I_{erzwungen}$ beides abgebildet in einer phasengerechten Anordnung. Hierbei steht $U_{Erreger}$ für die Spannung an der Wechselspannungsquelle und $I_{erzwungen}$ für die Stromstärke im Schwingkreis.





g) Definieren Sie die Konzepte „erzwungene Schwingung“ und „Resonanz“.

h) Nennen Sie mindestens ein Merkmal, das darauf hindeutet, dass das vorherige Diagramm unter Resonanzbedingungen aufgenommen wurde. Beachten Sie: Die Spule und der Kondensator sind in den Experimentieranordnungen von Aufgabe a) und g) gleich.

i) Erklären Sie, wie sich die Stromstärke I im vorherigen Diagramm verändert, wenn die Erregerfrequenz f verringert oder erhöht wird, während die Amplitude der anregenden Wechselspannung gleich bleibt.

Die Funktion der Stromstärke I über die Zeit t für diese erzwungene Schwingung lässt sich mit

$$I_{erzwungen}(t) = \hat{I} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

darstellen (vorherige Abbildung). Der durch die Induktivität *L* der Spule verursachte Spannungsabfall folgt der Zeitabhängigkeit

$$U_L(t) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

. Der Spannungsabfall am Kondensator, der eine Kapazität *C* besitzt, wird zeitabhängig als

$$U_C(t) = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

beschrieben.

j) Leiten Sie die beiden vorgegebenen Beziehungen

$$U_L(t) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

her.

k) Berechnungen zeigen, dass <u>im betrachteten Resonanzfall</u> die Amplituden von $U_L(t)$ und $U_C(t)$ identisch sind. Ermitteln Sie die Amplitude der aufgrund der Induktivität *L* der Spule hervorgerufenen Spannung $U_L(t)$ oder die Amplitude der am Kondensator auftretenden Spannung $U_C(t)$.

l) Deuten Sie das Ergebnis für

$$\hat{U}_L (= \hat{U}_C)$$

im Kontext des spezifischen Resonanzfalles.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____