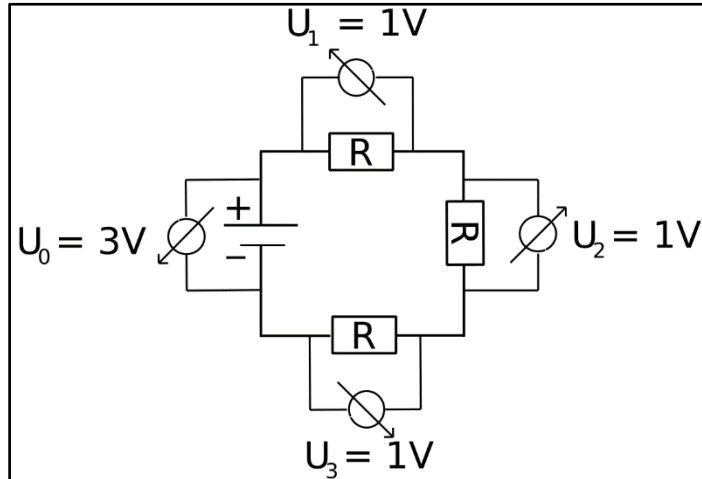


## Elektromagnetischer Schwingkreis - Thomson'sche Gleichung und Periodendauer

Die Grundlage zur Herleitung der Thomson'schen Schwingungsgleichung ist das Kirchhoff'sche Gesetz (Maschenregel). Dieses besagt, dass die Summe aller Spannungen in einer „Masche“ (einem Stromkreis) gleich 0 ist. Dieses kann man am besten mithilfe eines Beispiels erklären. Am Netzgerät liegt eine Spannung von  $U_0 = 3\text{ V}$  an. Diese Spannung verteilt sich auf die Widerstände. An den Widerständen fällt jeweils die Spannung von  $1\text{ V}$  ab. Wir können schreiben



$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3$$

Bringt man  $U_0$  auf die rechte Seite ergibt das

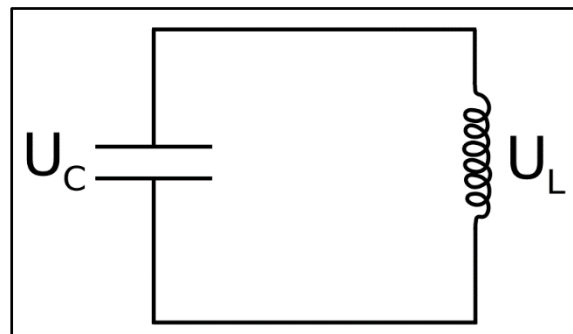
$$0 = U_1 + U_2 + U_3 - U_0 \quad (\text{Maschenregel})$$

Für unser Beispiel wäre das

$$0\text{ V} = 1\text{ V} + 1\text{ V} + 1\text{ V} - 3\text{ V}$$

Im ungedämpften LC-Schwingkreis haben wir die Spannung  $U_C$  am Kondensator und die Spannung  $U_L$  an der Spule. Laut der Maschenregel ist die Summe der beiden Spannung gleich 0.

$$0 = U_C + U_L \quad (\text{Gleichung 1})$$



Die Spannung  $U_C$  ist gegeben durch

$$U_C = \frac{Q(t)}{C}$$

Und die Spannung  $U_L$  durch

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot \dot{I}(t)$$

$Q$  und  $I$  sind zeitabhängige Größen, das heißt, dass sich ihre Beträge während einer

Schwingung ständig verändern.

Außerdem gilt

$$I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \dot{Q}(t)$$

und dementsprechend für die Ableitung von I(t)

$$\dot{I}(t) = \ddot{Q}(t)$$

Setzt man die letzten 4 Schritte in Gleichung 1 ein, ergibt sich folgende Differentialgleichung

$$\frac{1}{C} \cdot Q(t) + L \cdot \ddot{Q}(t) = 0$$

Wir teilen durch L und erhalten Gleichung 2

$$\frac{1}{C \cdot L} \cdot Q(t) + \ddot{Q}(t) = 0 \quad (\text{Gleichung 2})$$

Wir benötigen nun eine Funktion für Q (t), die die Differentialgleichung löst. Wir wählen folgenden Lösungsansatz

$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Und setzen diese in die Gleichung 2 ein

$$\frac{1}{C \cdot L} \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Wir klammern aus und erhalten

$$\left( \frac{1}{C \cdot L} - \omega^2 \right) \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Die Gleichung ist nun 0, wenn u.a. die erste Klammer 0 ist.

$$\frac{1}{C \cdot L} = \omega^2$$

Für  $\omega$  ergibt das

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L}}$$

Außerdem gilt

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Dadurch ergibt sich

$$2 \cdot \pi \cdot f = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Umgeformt nach f ergibt sich die Thomson'sche Schwingungsgleichung

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Für die Periodendauer T gilt

$$T = \frac{1}{f}$$

Und somit

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$